**Il metodo di eliminazione di Gauss**

Il **metodo di eliminazione di Gauss** (MEG)è un **algoritmo** che prende il nome dal matematico tedesco *Carl Friedrich Gauss* e che consente di ridurre una qualsiasi matrice in una forma più semplice detta **matrice a scala** (o a scalini) tramite l’applicazione di una serie di operazioni elementari dette anche **mosse di Gauss**.

Prima di addentrarci nella spiegazione del metodo vero e proprio, cerchiamo quindi di capire innanzitutto cos’è una matrice a scala e perché essa è così importante.

Vedremo poi come poter effettivamente applicare l’algoritmo per ottenere una matrice di questo tipo e infine spiegheremo brevemente le sue principali applicazioni nell’ambito dell’Algebra Lineare.

**Matrici a scala**

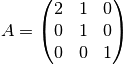
Per fornire la definizione di matrice a scala è necessario prima di tutto introdurre il concetto di **pivot**, un concetto molto importante che riguarda qualsiasi matrice.

Presa una riga qualsiasi non nulla della matrice, si dice **pivot** della riga il suo **primo elemento non nullo partendo da sinistra.**

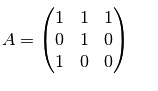
Tenendo bene a mente questo, possiamo quindi dire che una matrice qualsiasi A=[aij] viene detta **a scala** (o a scalini) se valgono le seguenti due condizioni:

1. tutte le eventuali righe nulle (righe con soli elementi a 0) sono raggruppate in fondo alla matrice;
2. per ogni riga non nulla della matrice, tutti gli elementi che si trovano al di sotto del suo pivot nella stessa colonna e nelle colonne precedenti sono pari a 0.

Vediamo due semplici esempi per chiarire il concetto:

1. 

è una matrice a scala: i suoi pivot sono rispettivamente 2 per la prima riga, 1 per la seconda riga e 1 per la terza riga, e tutti gli elementi che si trovano sotto ai pivot nella stessa colonna o in quelle precedenti sono pari a 0.

1. 

non è una matrice a scala perché sotto al pivot della prima riga (l’elemento 1 della prima colonna) troviamo un elemento diverso da 0 (l’1 della terza riga).

Le matrici a scala rivestono un ruolo di grande importanza soprattutto nell’ambito dell’Algebra Lineare per molte differenti applicazioni: l’utilizzo di una di queste, infatti, permette ad esempio di risolvere in maniera piuttosto semplice un **sistema di equazioni lineari** nonché di calcolare immediatamente il **rango** di una qualsiasi matrice, come avremo modo di approfondire ulteriormente nella parte conclusiva di questa lezione.

**L’algoritmo di Gauss**

Come già detto in precedenza, l’obiettivo del metodo di Gauss è quello di ridurre una matrice data in una matrice a scala.

Per fare questo si applicano alla matrice di partenza una serie di operazioni elementari sulle matrici chiamate **mosse di Gauss**.

Le mosse che è consentito utilizzare sono le seguenti:

* scambiare due righe tra loro;
* moltiplicare una riga della matrice per un numero reale non nullo, generalmente detto *scalare*;
* sommare ad una riga un’altra riga eventualmente moltiplicata per uno scalare.

Queste sono le **uniche tre operazioni** che l’algoritmo permette di fare, nulla di più e nulla di meno: non è quindi consentito operare scambi o operazioni di alcun tipo sulle colonne, ma solamente sulle righe.

Ed è proprio applicando solamente queste tre operazioni per un numero finito di volte che l’algoritmo permette di trasformare una qualsiasi matrice data in una matrice a scala, sviluppandosi in **tre passi** successivi, che sono i seguenti:

1. 1. Se la matrice è costituita da una sola riga, l’algoritmo termina; altrimenti:
   2. Individuare la prima colonna non nulla (quella con indice più basso) ed il suo pivot; se non esistono colonne non nulle, la matrice è nulla, quindi già a scala. In questo caso l’algoritmo termina qui.
   3. Se il pivot si trova nella i-esima riga, scambiare la prima riga con la i-esima.
   4. Rendere nulli tutti gli altri elementi della colonna contenente il pivot della prima riga, sommando alle varie righe gli opportuni multipli della prima.
2. 1. Ripetere il passo 1 sulla matrice ottenuta al passo precedente, senza però considerare la prima riga.
3. 1. Ripetere il passo 2 sulla matrice “schermata”, fino ad esaurimento di tutte le righe.

Dalla descrizione dell’algoritmo si nota quindi che il metodo di Gauss, ad ogni passo, applica alla matrice data in ingresso delle operazioni elementari, trasformandola perciò in una **matrice** ad essa **equivalente per righe** (ricordando che due matrici si dicono *equivalenti per righe* se si possono ottenere una dall’altra applicando una sequenza finita di operazioni elementari).

Questo garantisce quindi che **anche la nostra matrice a scala, ottenuta al termine dell’algoritmo, sia equivalente per righe a quella iniziale**.

Al tempo stesso, però, è altresì evidente che, data una matrice A qualsiasi, esistono più matrici a scala equivalenti per righe ad A, a seconda delle operazioni che si è scelto di applicare.

L’algoritmo di Gauss permette di ottenere **una di queste matrici**: esso, infatti, non fornisce mai lo stesso risultato ma dipende dalle scelte effettuate nei vari passi.

Per comprendere meglio quanto detto finora, nella sezione successiva viene proposto un esercizio risolto che consentirà di prendere familiarità con l’algoritmo e vedere applicati nella pratica i vari passi.

Sarà poi possibile mettere alla prova quanto imparato tramite un apposito esercizio.

**Tutorial ed Esercizio risolto**

**Spiegazione direttamente sul video oppure immagine con spiegazione dei vari pulsanti.**

**Esercizio da risolvere**

**Approfondimento: principali applicazioni dell’algoritmo di Gauss**

Come anticipato all’inizio della lezione, l’algoritmo di Gauss trova diverse applicazioni in Algebra Lineare.

Tra i suoi principali utilizzi vale la pena citare soprattutto il calcolo del **rango** di una matrice e la **risoluzione di sistemi di equazioni lineari**.

**Rango di una matrice**

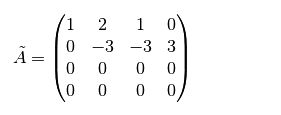
Il **rango** di una matrice esprime una proprietà comune a tutte le matrici e che risulta essere di fondamentale importanza nello studio dell’Algebra Lineare e per la risoluzione di sistemi lineari (di cui si tratterà nel paragrafo seguente).

Data una matrice a scala per righe S, si definisce rango di S il **numero di righe non nulle** di S e viene generalmente indicato con *r(S)*.

Più in generale, data invece una matrice qualsiasi A, definiamo il rango di A come il **rango di una qualunque matrice a scala equivalente** ad A.

Dalla definizione data, appare quindi subito evidente come il metodo di eliminazione di Gauss possa essere utilizzato per determinare il rango di una qualsiasi matrice in maniera estremamente semplice: è sufficiente applicare infatti l’algoritmo per ottenere una matrice a scala equivalente a quella data, e il rango verrà di fatto a coincidere con il **numero di pivot della matrice ridotta.**

Supponiamo ad esempio di ottenere come risultato dell’applicazione del nostro algoritmo la seguente matrice a scala:



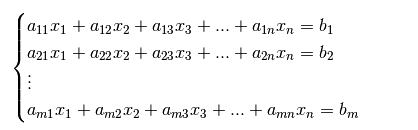
Questa matrice possiede due righe nulle raggruppate in fondo (come impone la definizione di matrice di scala) e due soli pivot (il primo elemento della prima riga e il secondo elemento della seconda riga).

Possiamo quindi concludere che anche il rango di questa matrice, così come di quella iniziale, sia proprio 2.

**Risoluzione di sistemi lineari**

Pensiamo ad un qualunque **sistema lineare di *m* equazioni in *n* incognite**.

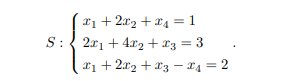
Un sistema di questo tipo si trova generalmente rappresentato nel modo seguente:



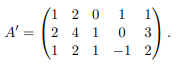
Al fine però di decidere se il sistema in questione ammetta soluzioni e, in caso affermativo, determinare poi quali effettivamente siano queste soluzioni, risulta spesso più conveniente **associare al sistema una matrice**.

Tale matrice, detta **matrice completa**, non è altro che la matrice contenente, nell’ordine, i **coefficienti delle equazioni** del sistema e, in fondo ad ogni riga, il **termine noto** dell’equazione corrispondente.

Ad esempio dato il seguente sistema lineare



la sua matrice completa risulterà essere:



Poiché ciò che a noi interessa, dato un sistema e la sua matrice corrispondente, è determinare se questo sia risolvibile, ci risulta molto comodo considerare in particolare uno specifico tipo di sistema, detto **sistema a scala**, la cui matrice completa sia cioè una matrice a scala.

Avere a disposizione un sistema in questa forma è particolarmente vantaggioso in quanto risulta praticamente immediato riconoscere se esso ammetta o meno soluzione: infatti, il sistema **non è risolubile** se e solo se contiene un’equazione impossibile del tipo ***0=b*** (dove b è il termine noto di una equazione del sistema), vale a dire se nella matrice completa associata al sistema **esiste una riga i cui elementi sono tutti nulli tranne l’ultimo**.

Possiamo quindi dire che un sistema a scala che non contenga equazioni (o righe se si considera la matrice corrispondente) del tipo precedente è sempre risolubile, e le soluzioni possono poi essere determinate molto facilmente applicando il **metodo della sostituzione**.

Va da sé quindi che, quanto detto finora, suggerisce un ottimo metodo per risolvere un sistema lineare, ovvero passare ad un **sistema a scala equivalente**, e questo, come abbiamo visto precedentemente, può essere fatto in maniera abbastanza semplice applicando l’algoritmo di Gauss sulla matrice completa relativa al sistema.